

Задача 3. Списывать — норма?

Решение и критерии проверки

Всероссийская олимпиада по экономике

Вороново
17 апреля 2017 г.

Пункт а)

- ▶ Пусть есть X честных и Y списывающих школьников
- ▶ Честный школьник в течение месяца:
 - ▶ $X - 1$ раз сидит с честным и получает 10
 - ▶ Y раз сидит с нечестным и получает -10
- ▶ Выигрыш в первом месяце честного школьника равен

$$10(X - 1) - 10Y = 10X - 10Y - 10$$

- ▶ Списывающий школьник в течение месяца:
 - ▶ X раз сидит с честным и получает 5
 - ▶ $Y - 1$ раз сидит со списывающим и получает 0
- ▶ Выигрыш в первом месяце списывающего школьника равен $5X$

Пункт а)

- ▶ Когда честному выгодно стать списывающим?
- ▶ Если честный станет списывающим, то будет $X - 1$ честных и $Y + 1$ списывающих
- ▶ Платеж отклонившегося школьника будет равен

$$5(X - 1) + 0 \cdot Y = 5(X - 1)$$

- ▶ Выгодно отклоняться, если платеж в случае смены типа (с учетом изменения количества школьников каждого типа!) будет больше платежа сегодня более чем на 15

$$5(X - 1) > 10(X - 1) - 10Y + 15$$

$$X < 2Y - 2$$

- ▶ С учетом соотношения $X + Y = 22$ получаем $X < 14$
($Y > 8$)

Пункт а)

- ▶ Когда списывающему выгодно стать честным?
- ▶ Если списывающий станет честным, то будет $X + 1$ честных и $Y - 1$ списывающих
- ▶ Платеж отклонившегося школьника будет равен

$$10X - 10 \cdot (Y - 1) = 10X - 10Y + 10$$

- ▶ Выгодно отклоняться, если платеж в случае смены типа (с учетом изменения количества школьников каждого типа!) будет больше платежа сегодня

$$10X - 10Y + 10 > 5X$$

$$X > 2Y - 2$$

- ▶ С учетом соотношения $X + Y = 22$ получаем $X > 14$
($Y < 8$)

Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть $X > 14$

- ▶ После первого месяца все списывающие станут честными
- ▶ Все честные останутся честными
- ▶ Во втором месяце будет 22 честных и 0 списывающих
- ▶ Так как $22 > 14$, то все будут оставаться честными в третьем месяце и всегда дальше

Рассмотрим три случая.

Случай 2. Пусть $X < 14$

- ▶ После первого месяца все честные станут списывающими
- ▶ Все списывающие останутся списывающими
- ▶ Во втором месяце будет 0 честных и 22 списывающих
- ▶ Так как $0 < 14$, то все будут оставаться списывающими в третьем месяце и всегда дальше

Рассмотрим три случая.

Случай 3. Пусть $X = 14$

- ▶ После первого месяца все честные останутся честными
- ▶ Все списывающие останутся списывающими
- ▶ Во втором месяце будет 14 честных и 8 списывающих
- ▶ Это соотношение не изменится и в последующих периодах

Критерии проверки пункта а) (15 баллов)

- ▶ Вывод условия смены типа честным школьником ($X < 14$) — **5 баллов**
- ▶ Вывод условия смены типа списывающим школьником ($X > 14$) — **5 баллов**
- ▶ Если условия не были выведены, то можно было получить **по 1 баллу** из 5 за выписанный выигрыш честного и списывающего школьника
- ▶ Свод условий и выписывание ответа — **5 баллов**
- ▶ Если задача решалась перебором и перебор был неполным, то можно было получить (в зависимости от степени неполноты) **до 3 баллов** за правильно разобранные случаи каждого из трех типов

Пункт б)

Из пункта а) следует, что существует ровно 3 равновесных класса:

- ▶ $X = 22, Y = 0$
- ▶ $X = 0, X = 22$
- ▶ $X = 14, Y = 8$

Значит, Вовочка учился в классе одного из трех типов

Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть $X = 22$, $Y = 0$

- ▶ Если Вовочка решил отклониться, то он поменял свой тип на списывающего
- ▶ Тогда в классе $\hat{X} = 21$ честных и $\hat{Y} = 1$ списывающий школьник
- ▶ Так как $\hat{X} = 21 > 14$, то по пункту а) во втором месяце и дальше в классе будет 22 честных и 0 списывающих школьников

Рассмотрим три случая.

Случай 2. Пусть $X = 0, Y = 22$

- ▶ Если Вовочка решил отклониться, то он поменял свой тип на честного
- ▶ Тогда в классе $\hat{X} = 1$ честный и $\hat{Y} = 21$ списывающий школьник
- ▶ Так как $\hat{X} = 1 < 14$, то по пункту а) во втором месяце и дальше в классе будет 0 честных и 22 списывающих школьников

Рассмотрим три случая.

Случай 3. Пусть $X = 14$, $Y = 8$

- ▶ Вовочка может быть честным или списывающим
- ▶ Если Вовочка — честный и решил стать списывающим, то в классе $\hat{X} = 15$ честных и $\hat{Y} = 8$ списывающих школьников
- ▶ Тогда по пункту а) во втором месяце и дальше в классе будет 22 честных и 0 списывающих школьников
- ▶ Если Вовочка — списывающий и решил стать честным, то в классе $\hat{X} = 13$ честных и $\hat{Y} = 9$ списывающих школьников
- ▶ Тогда по пункту а) во втором месяце и дальше в классе будет 0 честных и 22 списывающих школьников

Значит, возможны 2 варианта развития событий:

- ▶ Если ($X = 22, Y = 0$) или ($X = 14, Y = 8$ и Вовочка был честным, но переключился на списывающего), то со второго месяца будет 22 честных и 0 списывающих школьников
- ▶ Если ($X = 0, Y = 22$) или ($X = 14, Y = 8$ и Вовочка был списывающим, но переключился на честного), то со второго месяца будет 0 честных и 22 списывающих школьников

Критерии оценки пункта б)

- ▶ Проанализированы случаи $X = 22, Y = 0$ и $X = 0, Y = 22$ — по **1 баллу** за каждый из случаев
- ▶ Проанализирован случай $X = 14, Y = 8$ — по **1 баллу** за каждый из двух случаев типов Вовочки
- ▶ Все собрано правильно в ответ — **1 балл**

Пункт в)

- ▶ Существует 3 типа равновесных классов; для каждого из школьников предпочтительно равновесие $X = 22, Y = 0$
- ▶ Если $X = 0$ или $X = 1$, то сделать всех честными не получится
- ▶ Если $X = 2$, тоже не получится. Докажем это

Пункт в)

- ▶ Чтобы обратить списывающего школьника в честного, необходимо, чтобы честные посидели с ним не менее 15 дней
- ▶ Но в эти 15 дней двое честных не будут сидеть друг с другом
- ▶ Значит, честные будут сидеть друг с другом не более 7 дней и обратятся в нечестных
- ▶ У честных в запасе в сумме 42 дня. Значит, больше чем двоих обратить в честных точно не получится
- ▶ Значит, из класса с двумя честными школьниками не получится сделать класс с 22 честными школьниками

Пункт в)

- ▶ А вот $X = 3$ достаточно. Сначала покажем, как из трех школьников сделать 4 честных школьников
- ▶ Пусть A, B, C — честные, а D — списывающий.
Рассмотрим такую рассадку:
- ▶ Дни 1-7: A с D , B с C
- ▶ Дни 8-14: A с C , B с D
- ▶ Дни 15-21: A с B , C с D
- ▶ Тогда D обратится в честного, а A, B, C останутся честными
- ▶ Честных стало 4

Пункт в)

- ▶ Докажем, что при наличии 4 и более честных школьников количество честных можно увеличивать каждый месяц по крайней мере на 1
- ▶ Трое честных обращают одного списывающего в честного по ранее представленной схеме
- ▶ Оставшиеся пары честных сидят друг с другом весь месяц и остаются честными
- ▶ Если остается еще 1 честный, он весь месяц сидит с одним нечестным. Они меняют типы друг друга
- ▶ По итогам месяца количество честных увеличивается на 1
- ▶ Значит, учитель сможет превратить всех в честных за конечное число месяцев

Критерии оценки пункта в)

- ▶ Доказано, что если честных школьников не более 2, то ничего не получится — **4 балла**
- ▶ Если с 2 школьниками доказательство не удалось, то **1 балл** (в сумме) можно было получить за разбор случаев $X = 0$, $X = 1$
- ▶ Показано, что из $X = 3$ можно сделать 4 честных школьников — **3 балла**
- ▶ Показано, что при 4 и более честных школьников можно увеличивать число честных школьников каждый месяц как минимум на 1 — **3 балла**