Задача 6+

Несчастные рисоеды

Решение (а)

Количество счастливых семей равно потреблению риса.

$$C_{2017} = 80 * \sqrt{3600} - I_{2017}$$

$$C_{2018} = 80 * \sqrt{I_{2017}}$$

(в 2018 году нет смысла инвестировать, так как президента не волнует, что будет в 2019 году). Чтобы достичь своей цели, президенту следует максимизировать $\mathbf{min}(\boldsymbol{C_{2017}}, \boldsymbol{C_{2018}})$. Для этого, нужно, чтобы указанные переменные были равны:

$$80 * 60 - I_{2017} = 80 * \sqrt{I_{2017}}$$ (6 баллов)

$I_{2017} = 1600$ (3 балла) $\Rightarrow C_{2017} = C_{2018} = 3200$ (3 балла)

$C_{2019} = 0$ (3 балла)

Критерии по альтернативным вариантам (а)

(A1) Можно угадать ответ и потом обосновать, что он оптимален. При наличии обоснования за это ставится полный балл

(A2) Если вместо минимума $\mathbf{min}(\boldsymbol{C_{2017}}, \boldsymbol{C_{2018}})$ максимизируется сумма $\boldsymbol{C_{2017}} + \boldsymbol{C_{2018}}$ (или среднее) то такой путь не засчитывается, так как это другая задача. Не засчитывается, даже если приводит к таким же числам, как в верном ответе.

(A3) Исключение к параграфу (A2)

Если участник олимпиады решил задачу максимизации суммы двух потреблений, а потом строго доказал, что **в данном** случае её решение эквивалентно максимизации минимума, то участник получает полный балл.

Решение (б)

Максимизируем $\mathbf{min}(\boldsymbol{C_{2017}}, \boldsymbol{C_{2018}}, \dots)$

Обозначим максимально возможное количество вечно счастливых семей C^*. Для его поддержания необходим уровень инвестиций I^*.

В этом случае ежегодный уровень потребления составит:

$$C^* = 80 * \sqrt{I^*} - I^* \text{ (9 баллов)}$$

Относительно $\sqrt{I^*}$ — это парабола с ветвями направленными вниз, следовательно, мы можем найти точку максимума:

$$I^* = 1600 \text{ (3 балла)}, C^* = 1600 \text{ (3 балла)}.$$

UPD: доказательство невозможности большей численности счастливых семей

$$C_t = 80\sqrt{I_{t-1}} - I_t = 80\sqrt{I_{t-1}} - (I_{t-1} + \Delta I_t) =$$
$$= \mathbf{80\sqrt{I_{t-1}} - I_{t-1}} - \Delta I_t \leq \mathbf{1600} - \Delta I_t$$

Предположим, что в любой момент времени

$$C_t \geq 1601$$

Тогда в любой момент времени

$$1600 - \Delta I_t \geq C_t \geq 1601$$
$$\Delta I_t \leq -1$$

Тогда инвестиции в конце концов упадут до нуля, что не позволит поддерживать требуемый уровень потребления

Критерии по альтернативным вариантам (б)

(Б1) Можно угадать ответ и потом обосновать, что он оптимален. При наличии обоснования за это ставится полный балл

(Б2) Если вместо минимума $\mathbf{min}(\boldsymbol{C_{2017}}, \boldsymbol{C_{2018}}, \ldots)$ максимизируется сумма $\boldsymbol{C_{2017}} + \boldsymbol{C_{2018}} + \boldsymbol{C_{2019}} + \cdots$, то такой путь не засчитывается, так как это другая задача. Не засчитывается, даже если приводит к таким же числам, как в верном ответе.

(Б3) Исключение к параграфу (Б2)

Если участник олимпиады решил неправильную задачу, нашел оттуда $I^* = 1600$, а затем строго доказал, что при любом другом уровне инвестиций в каждом периоде потребление будет ниже $C^* = 1600$, то это эквивалентно ситуации (Б1) с угадыванием и обоснованием правильного ответа. И поэтому засчитывается.

Содержательное замечание

Распространенная ошибка в пункте (б):

$$Y^* = 4800, I^* = 3600, C^* = 1200$$

Сравним с правильным ответом:

$$Y^* = 3200, I^* = 1600, C^* = 1600$$

Обратите внимание, что при правильной стратегии ВВП и инвестиции меньше, зато потребление больше.

Мораль: увеличение ВВП само по себе — это не всегда хорошо. Наращивать инвестиции (и, следовательно, ВВП) разумно до тех пор, пока это способствует росту потребления

В общем случае выявление оптимальной нормы инвестирования обсуждается в макроэкономике, в моделях экономического роста

Приложение: про суммы и минимумы

- Для пункта (а) задача $\boldsymbol{C_{2017} + C_{2018}} \rightarrow \boldsymbol{max}$ имеет решение (максимум существует). Поэтому можно её решить, а потом доказать, что найденное решение эквивалентно решению задачи $\mathbf{min}(\boldsymbol{C_{2017}, C_{2018}}) \rightarrow \boldsymbol{max}$
- Для пункта (б) задача максимизации бесконечной суммы
$$\boldsymbol{C_{2017} + C_{2018} + C_{2019} + \cdots}$$
не имеет решения (максимум не существует). Поэтому аналогичная пункту (а) стратегия не работает